5

Accélération de la convergence des suites réelles

Pour tout ce chapitre, on désigne par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels qui converge vers un réel ℓ. On suppose de plus que $u_n \neq \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Les résultats classiques sur les séries numériques et les intégrales généralisées sont supposés acquis.

5.1 Vitesse de convergence

Définition 5.1 *Si la suite* $\left(\left|\dfrac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente de limite* λ*, on dit alors que la convergence de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vers* ℓ *est :*

- *lente, pour* $\lambda = 1$ *;*
- *géométrique de rapport* λ*, pour* $\lambda \in \left]0,1\right[$ *;*
- *rapide pour* $\lambda = 0$*.*

Dans le cas où $\lambda \in \left]0,1\right[$, pour $\varepsilon > 0$ tel que $0 < \lambda+\varepsilon < 1$, on peut trouver un entier naturel n_ε tel que :

$$\forall n \geq n_\varepsilon,\ 0 < \left|\frac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell}\right| < \lambda+\varepsilon$$

ce qui entraîne, pour $n \geq n_\varepsilon$:

$$|u_n-\ell| < (\lambda+\varepsilon)^{n-n_\varepsilon}\,|u_{n_\varepsilon}-\ell| = \frac{|u_{n_\varepsilon}-\ell|}{(\lambda+\varepsilon)^{n_\varepsilon}}\,(\lambda+\varepsilon)^n$$

ce qui signifie que la suite $(|u_n-\ell|)_{n\geq n_\varepsilon}$ est dominée par la suite géométrique $((\lambda+\varepsilon)^n)_{n\geq n_\varepsilon}$.

Définition 5.2 *On dit que le réel* λ*, quand il existe, est le coefficient de convergence de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*.*

Remarque 5.1 *Si la suite* $\left(\left|\dfrac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge, sa limite* λ *est alors nécessairement dans* $[0,1]$*. En effet, dans le cas contraire, on a* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell}\right| = \lambda > 1$*, ce qui entraîne* $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n-\ell| = +\infty$ *et la suite* $(u_n-\ell)_{n\in\mathbb{N}}$ *est divergente (cette suite est minorée par une suite géométrique divergente), ce qui est en contradiction avec la convergence de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vers* ℓ*.*

Remarque 5.2 *Dans la pratique, on ne connaît pas toujours la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mais dans certains cas, on peut calculer le coefficient de convergence λ sans connaître explicitement cette limite ℓ.*

Lemme 5.1 *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell} = \lambda \in \left]-1,1\right[\setminus \{0\}$ (la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ est donc géométrique de rapport $|\lambda|$) et s'il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que $u_n \neq u_{n-1}$ pour tout $n \geq n_0$, alors la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}-u_n}{u_n-u_{n-1}}\right)_{n\geq n_0}$ converge vers λ.*

Démonstration. Pour tout $n \geq n_0$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}-u_n}{u_n-u_{n-1}} &= \frac{u_{n+1}-\ell-(u_n-\ell)}{u_n-\ell-(u_{n-1}-\ell)} \\
&= \frac{u_n-\ell}{u_{n-1}-\ell}\,\frac{\dfrac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell}-1}{\dfrac{u_n-\ell}{u_{n-1}-\ell}-1} \\
&= \frac{u_n-\ell}{u_{n-1}-\ell}\,\frac{1-\dfrac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell}}{1-\dfrac{u_n-\ell}{u_{n-1}-\ell}} \underset{n\to+\infty}{\to} \lambda\frac{1-\lambda}{1-\lambda} = \lambda
\end{aligned}$$

(de $u_n \neq u_{n-1}$, on déduit que $\dfrac{u_n-\ell}{u_{n-1}-\ell} \neq 1$) ■

Remarque 5.3 *Le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell}\right| = \lambda$ n'entraîne pas nécessairement la convergence de la suite $\left(\left|\dfrac{u_{n+1}-u_n}{u_n-u_{n-1}}\right|\right)_{n\geq n_0}$. Par exemple pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{2p} = (-1)^p \lambda^{2p}$ et $u_{2p+1} = (-1)^p \lambda^{2p+1}$ avec $0 < \lambda < 1$, on a $|u_n| = \lambda^n \underset{n\to+\infty}{\to} \ell = 0$, $\left|\dfrac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell}\right| = \lambda$, $u_n \neq u_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$ et :*

$$\frac{u_{2p+1}-u_{2p}}{u_{2p}-u_{2p-1}} = \frac{(-1)^p \lambda^{2p+1}-(-1)^p \lambda^{2p}}{(-1)^p \lambda^{2p}-(-1)^{p-1} \lambda^{2p-1}} = -\frac{\lambda(1-\lambda)}{\lambda+1}$$

$$\frac{u_{2p+2}-u_{2p+1}}{u_{2p+1}-u_{2p}} = \frac{(-1)^{p+1} \lambda^{2p+2}-(-1)^p \lambda^{2p+1}}{(-1)^p \lambda^{2p+1}-(-1)^p \lambda^{2p}} = \frac{\lambda(\lambda+1)}{1-\lambda}$$

et la suite $\left(\left|\dfrac{u_{n+1}-u_n}{u_n-u_{n-1}}\right|\right)_{n\geq 1}$ est divergente.

Exercice 5.1 *Étudier la vitesse de convergence des suites $(u_n)_{n\geq 2}$ définies par $u_n = \dfrac{1}{n^b}$ où $b > 0$, $u_n = \dfrac{1}{\ln(n)}$, $u_n = a^n$ où $0 < |a| < 1$, $u_n = \dfrac{1}{n!}$ et $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$.*

Solution 5.1 *Chacune de ces suites converge vers 0 et :*

– *pour* $u_n = \dfrac{1}{n^b}$, *on a :*

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^b \underset{n\to+\infty}{\to} 1,$$

donc la convergence est lente ;

– *pour* $u_n = \dfrac{1}{\ln(n)}$, *on a :*

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\frac{1}{\ln(n+1)} + 1 \underset{n\to+\infty}{\to} 1,$$

donc la convergence est lente ;

– *pour* $u_n = a^n$, *on a :*

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |a| \underset{n\to+\infty}{\to} \lambda = |a|,$$

donc la convergence est géométrique de rapport $|a|$ *;*

– *pour* $u_n = \dfrac{1}{n!}$, *on a :*

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$

donc la convergence est rapide ;

– *pour* $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$, *on a :*

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{e} < 1,$$

donc la convergence est géométrique de rapport $\dfrac{1}{e}$.

D'un point de vue pratique, on peut utiliser les critères suivants où l'on compare la suite $(|u_n - \ell|)_{n\in\mathbb{N}}$ aux suites $\left(\dfrac{1}{n^b}\right)_{n\geq 1}$, $\left(\dfrac{1}{\ln(n)}\right)_{n\geq 2}$ ou $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$:

– si $|u_n - \ell| \underset{+\infty}{\backsim} \dfrac{C}{n^b}$ où C et b sont des réels strictement positif, alors la convergence est lente ;
– si $|u_n - \ell| \underset{+\infty}{\backsim} \dfrac{C}{\ln(n)}$ où C est un réel strictement positif, alors la convergence est lente ;
– si $|u_n - \ell| \underset{+\infty}{\backsim} C\lambda^n$, où $C > 0$ et $\lambda \in]0,1[$, alors la convergence est géométrique de rapport λ.

Exercice 5.2 *En considérant la suite définie par :*

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} \text{ si } n = 2p \\ \dfrac{2}{n} \text{ si } n = 2p+1 \end{cases}$$

montrer qu'une suite convergente n'a pas nécessairement de vitesse de convergence.

Solution 5.2 *Avec* $|u_n| \leq \dfrac{2}{n}$ *pour tout* $n \geq 1$, *on voit que cette suite converge vers* 0 *et avec :*

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \begin{cases} \dfrac{2n}{n+1} \text{ si } n = 2p \\ \dfrac{n}{2(n+1)} \text{ si } n = 2p+1 \end{cases}$$

on voit que la suite $\left(\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est divergente.*

Remarque 5.4 *L'exemple précédent montre également qu'une majoration du type* $|u_n - \ell| \leq \dfrac{C}{n^b}$ *ne permet pas nécessairement d'avoir des informations sur la vitesse de convergence de la suite* u.
De même en considérant la suite définie par :

$$u_n = \begin{cases} \lambda^n \text{ si } n = 2p \\ 2\lambda^n \text{ si } n = 2p+1 \end{cases}$$

où $0 < \lambda < 1$, *on a* $|u_n| \leq 2\lambda^n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ *et :*

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \begin{cases} 2\lambda \text{ si } n = 2p \\ \dfrac{\lambda}{2} \text{ si } n = 2p+1 \end{cases}$$

n'a pas de limite.

Exercice 5.3 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *la suite définie par :*

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Montrer que la convergence de cette suite (vers le nombre e) est lente et que la convergence de la suite $(v_n)_{n\geq 0} = (u_{2^n})_{n\geq 0}$ *est géométrique.*

Solution 5.3 *Un développement limité à l'ordre 2 nous donne :*

$$\forall n \geq 1,\ u_n = e\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

ce qui entraîne $|e - u_n| \underset{+\infty}{\backsim} \dfrac{e}{2n}$ *et la convergence de cette suite est lente.*
Pour la suite $(v_n)_{n\geq 0} = (u_{2^n})_{n\geq 0}$, *on a* $|e - v_n| \underset{+\infty}{\backsim} \dfrac{e}{2^{n+1}}$ *et la convergence est géométrique de rapport* $\dfrac{1}{2}$.

De manière plus générale, dès qu'on a un développement asymptotique de la forme :

$$u_n = \ell + \beta\lambda^n + o(\lambda^n)$$

avec β non nul et $|\lambda|$ dans $]0,1[$, la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ est géométrique de rapport $|\lambda|$.

En considérant les suites $(n\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $\left(\dfrac{\lambda^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on constate que la réciproque est fausse.

Il ne faut pas croire au vu de l'exemple précédent que l'on peut toujours accélérer la convergence d'une suite (on précisera cette notion au paragraphe suivant) par extraction. Par exemple les suites $u = \left(\dfrac{1}{\ln(n)}\right)_{n\geq 2}$, $v = \left(\dfrac{1}{\ln(2^n)}\right)_{n\geq 1} = \left(\dfrac{1}{n\ln(2)}\right)_{n\geq 1}$ et $w = \left(\dfrac{1}{\ln(n^2)}\right)_{n\geq 2} = \left(\dfrac{1}{2\ln(n)}\right)_{n\geq 2}$ convergent toutes lentement.

Par contre un développement asymptotique de la forme :

$$u_n = \ell + \frac{\beta}{n^b} + o\left(\frac{1}{n^b}\right)$$

avec β non nul et $b > 0$ qui assure une convergence lente donne :

$$u_{2^n} = \ell + \frac{\beta}{2^{nb}} + o\left(\frac{1}{2^{nb}}\right)$$

qui assure une convergence géométrique de rapport $\dfrac{1}{2^b}$ de la suite $(u_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 5.4 *Montrer que la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :*

$$\forall n \geq 0,\ u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!},$$

est rapide.

Solution 5.4 *On sait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers e.*
La formule de Taylor-Lagrange nous dit que pour tout $n \geq 1$, il existe un réel $c_n \in \,]0,1[$ tel que :

$$e - u_n = \frac{e^{c_n}}{n!}$$

ce qui donne :

$$0 < \frac{e - u_{n+1}}{e - u_n} = \frac{1}{n+1}\frac{e^{c_{n+1}}}{e^{c_n}} < \frac{1}{n+1}e \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

et la convergence est rapide.

Exercice 5.5 *Montrer que, pour tout réel $\alpha > 1$, la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :*

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

est lente.

Solution 5.5 *On sait que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers un réel ℓ (série de Riemann).*
Pour $n \geq 1$, on a :

$$\ell - u_n = \ell - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Avec les encadrements :

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}dt \leq \frac{1}{k^\alpha}$$

on déduit que :

$$\forall n \geq 2,\ \ell - u_n \leq \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt = \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}} \leq \ell - u_{n-1},$$

ou encore :

$$\forall n \geq 1,\ \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq (\alpha-1)(\ell - u_n) \leq \frac{1}{n^{\alpha-1}},$$

ce qui donne :

$$\ell - u_n \underset{+\infty}{\backsim} \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

et la convergence est lente.

Exercice 5.6 *Montrer que convergence de la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$ pour tout $n \geq 1$ est lente.*

Solution 5.6 *On sait que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers γ (constante gamma d'Euler). Pour tout $n \geq 1$, on a :*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \right) = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{t} \right) dt = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{t-k}{kt} dt,$$

ce qui fait apparaître γ comme somme d'une série, soit :

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{t-n}{nt} dt$$

et :

$$\gamma - u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{t-k}{kt} dt.$$

En utilisant les inégalités :

$$\int_k^{k+1} \frac{t-k}{kt} dt \leq \frac{1}{k^2} \int_k^{k+1} (t-k)\, dt = \frac{1}{2k^2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$$

et :

$$\int_k^{k+1} \frac{t-k}{kt} dt \geq \frac{1}{k(k+1)} \int_k^{k+1} (t-k)\, dt = \frac{1}{2} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

on en déduit que :

$$\frac{1}{2(n+1)} < \gamma - u_n < \frac{1}{2n}$$

et $\gamma - u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$. La convergence est donc lente.

Exercice 5.7 *Soient $I = [a, b]$ un intervalle réel fermé non réduit à un point et $f : I \to I$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $0 < |f'(x)| < 1$ pour tout $x \in I$.*

1. *Montrer que f admet un unique point fixe $\ell \in I$.*
2. *Pour u_0 donné dans $I \setminus \{\ell\}$, on définit la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que cette suite converge vers ℓ et que la convergence est géométrique de rapport $|f'(\ell)|$.*

Solution 5.7

1. *Avec la continuité de f et $f(I) \subset I$, on déduit que f admet au moins un point fixe. En effet, la fonction g définie sur I par $g(x) = f(x) - x$ étant continue telle que $g(a) = f(a) - a \geq 0$ et $g(b) = f(b) - b \leq 0$ (puisque $f(a)$ et $f(b)$ sont dans $I = [a, b]$), le théorème des valeurs intermédiaires nous dit qu'elle s'annule sur I. De plus l'hypothèse $-1 < f' < 1$ entraîne $g' = f' - 1 < 0$ sur I, c'est-à-dire que g est strictement décroissante sur I, donc injective, et la solution ℓ de $g(x) = 0$ sur I est unique. Ce réel ℓ est l'unique point fixe de f sur I.*

2. *Si $u_0 \neq \ell$ alors $u_n \neq \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, le résultat est vrai pour $n = 0$ et en le supposant vrai pour $n \geq 0$, le théorème des accroissements finis nous permet d'écrire $u_{n+1} - \ell = f(u_n) - f(\ell) = (u_n - \ell) f'(c_n)$ avec c_n strictement compris entre u_n et ℓ et $f'(c_n) \neq 0$, ce qui entraîne $u_{n+1} \neq \ell$.*
   Le développement limité qui précède nous permet également de déduire que :
   $$\frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell} = f'(c_n) \underset{n \to +\infty}{\to} f'(\ell) \in]-1, 1[\setminus \{0\},$$
   ce qui implique que la suite u converge vers ℓ et que la convergence est géométrique de rapport $|f'(\ell)|$.
   Dans cette situation, on dit que ℓ est un point fixe attractif de f.

Définition 5.3 *Soit $r \geq 2$ un entier naturel. On dit que la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers ℓ est d'ordre r s'il existe une constante $\lambda \neq 0$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{|u_{n+1} - \ell|}{|u_n - \ell|^r} = \lambda$.*

Une convergence lente ou géométrique est dite d'ordre 1.

On dit aussi que la convergence est super-linéaire si elle est d'ordre $r \geq 2$.

Si la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers ℓ est d'ordre $r \geq 1$, alors cet entier r est uniquement déterminé. En effet si $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{|u_{n+1} - \ell|}{|u_n - \ell|^r} = \lambda$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{|u_{n+1} - \ell|}{|u_n - \ell|^s} = \mu$ avec $s > r \geq 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \ell|^{s-r} = \dfrac{\lambda}{\mu}$ avec $\dfrac{\lambda}{\mu} \neq 0$, $s - r > 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - \ell) = 0$, ce qui est impossible.

Si la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers ℓ est d'ordre $r \geq 2$, alors $\left| \dfrac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell} \right|$ est équivalent à $\lambda |u_n - \ell|^{r-1}$ qui converge vers 0, c'est-à-dire que la convergence est rapide.

Mais réciproquement une convergence rapide n'est pas obligatoirement super-linéaire comme le montre l'exemple de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

En effet, on a vu (exercice 5.4) que cette suite converge rapidement vers e avec $e - u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(n+1)!}$, de sorte que pour tout entier $r \geq 2$, on a :

$$\frac{e - u_{n+1}}{|e - u_n|^r} \underset{+\infty}{\sim} \frac{((n+1)!)^r}{(n+2)!} = \frac{((n+1)!)^{r-1}}{(n+2)} \underset{n \to +\infty}{\to} +\infty$$

et la convergence ne peut être d'ordre r.

Exercice 5.8 *Soient $I = [a, b]$ un intervalle réel fermé non réduit à un point et $f : I \to I$ de classe $\mathcal{C}^r$ avec $r \geq 2$ telle que $|f'(x)| < 1$ pour tout $x \in I$.*

1. *Montrer que f admet un unique point fixe $\ell \in I$.*
2. *On suppose que $f^{(k)}(\ell) = 0$ pour tout k compris ente 1 et $r - 1$ et $f^{(r)}(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$. Pour u_0 donné dans $I \setminus \{\ell\}$, on définit la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que cette suite converge vers ℓ et que la convergence est d'ordre r.*
   On dit, dans cette situation, que ℓ est un point fixe super-attractif de f.

Solution 5.8

1. *Voir l'exercice 5.7.*
2. *La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre r permet d'écrire que :*

$$u_{n+1} - \ell = f(u_n) - f(\ell) = (u_n - \ell)^r \frac{f^{(r)}(c_n)}{r!}$$

avec c_n strictement compris entre u_n et ℓ, ce qui entraîne $u_n \neq \ell$ pour tout $n \geq 0$ (par récurrence) et :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1} - \ell}{(u_n - \ell)^r} = \frac{f^{(r)}(\ell)}{r!} \neq 0$$

ce qui implique que la suite u converge vers ℓ puisque :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|u_{n+1} - \ell|}{|u_n - \ell|} = \lim_{n \to +\infty} |u_n - \ell|^{r-1} \frac{\left|f^{(r)}(c_n)\right|}{r!} = 0$$

et la convergence est d'ordre r.

Exercice 5.9 *On se donne une fonction g de classe $\mathcal{C}^3$ sur un intervalle fermé $I = [a, b]$ telle que $g(a)g(b) < 0$, $g'(x) \neq 0$ et $g''(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$.*

1. *Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\ell \in]a, b[$.*
2. *On note f la fonction définie sur I par $f(x) = x - \dfrac{g(x)}{g'(x)}$. Montrer que $f'(\ell) = 0$ et $f''(\ell) \neq 0$.*
3. *On désigne par $J = [\ell - \eta, \ell + \eta]$ un intervalle contenu dans I, avec $\eta > 0$, tel que $f''(x) \neq 0$ pour tout $x \in J$. Montrer que la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in J \setminus \{\ell\}$ et $u_{n+1} = u_n - \dfrac{g(u_n)}{g'(u_n)}$ pour tout $n \geq 0$ (méthode de Newton) converge vers ℓ et que la convergence est d'ordre 2.*

Solution 5.9

1. *Le théorème des valeurs intermédiaires nous dit que l'équation $g(x) = 0$ a au moins une solution dans I et l'hypothèse $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$ avec g' continue nous dit que $g' > 0$ ou $g' < 0$ (théorème des valeurs intermédiaires pour g') ce qui implique que g est strictement monotone, donc injective. Cette solution ℓ est donc unique.*
2. *Le réel ℓ est l'unique point fixe dans I de la fonction f définie sur I par $f(x) = x - \dfrac{g(x)}{g'(x)}$.*

   Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I avec $f'(x) = \dfrac{g(x)g''(x)}{(g'(x))^2}$. De $g(\ell) = 0$ on déduit que $f'(\ell) = 0$ et :

$$f''(\ell) = \lim_{x \to \ell} \frac{f'(x)}{x - \ell} = \lim_{x \to \ell} \frac{g(x)}{x - \ell} \frac{g''(x)}{(g'(x))^2} = \frac{g''(\ell)}{g'(\ell)} \neq 0.$$

3. *Par continuité de f'' on peut trouver un voisinage J de ℓ tel que $f''(x) \neq 0$ pour tout $x \in J$.*

   La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 permet d'écrire que :

$$u_{n+1} - \ell = f(u_n) - f(\ell) = (u_n - \ell)^2 \frac{f''(c_n)}{r!}$$

avec c_n strictement compris entre u_n et ℓ et $f''(c_n) \neq 0$, ce qui entraîne $u_n \neq \ell$ pour tout $n \geq 0$ (par récurrence) et :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1} - \ell}{(u_n - \ell)^2} = \frac{f''(\ell)}{2} = \frac{g''(\ell)}{2g'(\ell)} \neq 0$$

ce qui implique que la suite u converge vers ℓ (puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{|u_{n+1} - \ell|}{|u_n - \ell|} = \lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \ell| \dfrac{|f''(c_n)|}{2} = 0$) et que la convergence est d'ordre 2.

5.2 Accélération de la convergence

Définition 5.4 *Si $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une autre suite convergente vers ℓ avec $v_n \neq \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on dit que la convergence de cette suite vers ℓ est plus rapide que celle de $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{v_n - \ell}{u_n - \ell} = 0$.*

Accélérer la convergence d'une suite consiste à construire à partir de cette dernière une autre suite qui converge plus vite vers la même limite.

Exercice 5.10 *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par :*

$$\forall n \geq 1, \ u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Montrer que la suite $(v_n)_{n \geq 0} = (u_{2^n})_{n \geq 0}$ permet d'accélérer la convergence de cette suite.

Solution 5.10 *On a vu (exercice 5.3) que $e - u_n \underset{+\infty}{\backsim} \dfrac{e}{2n}$ (convergence lente) et $e - v_n \underset{+\infty}{\backsim} \dfrac{e}{2^{n+1}}$ (convergence géométrique) de sorte que :*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{v_n - e}{u_n - e} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{2^n} = 0.$$

De manière plus générale, un développement asymptotique de la forme :

$$u_n = \ell + \frac{\beta}{n^b} + o\left(\frac{1}{n^b}\right)$$

avec β non nul et $b > 0$ donne :

$$v_n = u_{2^n} = \ell + \frac{\beta}{2^{nb}} + o\left(\frac{1}{2^{nb}}\right)$$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{v_n - \ell}{u_n - \ell} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^b}{2^{nb}} = 0$.

Mais l'extraction ne permet pas toujours d'accélérer la convergence d'une suite. Par exemple pour $u = \left(\dfrac{1}{\ln(n)}\right)_{n \geq 2}$ et $v = \left(\dfrac{1}{\ln(n^2)}\right)_{n \geq 2}$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{v_n}{u_n} = \dfrac{1}{\ln(2)}$.

L'exercice qui suit nous donne un procédé élémentaire, mais peu performant, d'accélération de la convergence, l'idée étant de remplacer chaque u_n par une moyenne pondérée de u_n et u_{n+1}. Ce procédé sera affiné par la méthode de Richardson.

Exercice 5.11 *Soit λ un réel différent de 1 et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :*

$$\forall n \geq 0,\ v_n = \frac{u_{n+1} - \lambda u_n}{1-\lambda}$$

(v_n est un barycentre de u_{n+1} et u_n).

1. *Préciser pour quelles valeurs de λ et à quelles conditions sur u la suite v converge vers ℓ plus rapidement que u.*
2. *Appliquer ce procédé à la suite $u = \left(\left(1+\frac{1}{2^n}\right)^{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ en précisant la vitesse de convergence de la suite accélératrice v obtenue.*

Solution 5.11 *Pour $\lambda = 0$, on a $v_n = u_{n+1}$, ce qui n'a pas beaucoup d'intérêt.*

1. *Pour tout réel λ différent de 1, la suite v converge vers ℓ et :*
$$\frac{v_n - \ell}{u_n - \ell} = \frac{u_{n+1} - \ell - \lambda(u_n - \ell)}{(1-\lambda)(u_n - \ell)} = \frac{1}{1-\lambda}\frac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell} - \frac{\lambda}{1-\lambda},$$
de sorte que :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n - \ell}{u_n - \ell} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell} = \lambda.$$
On a vu que la convergence de u vers ℓ impose $\lambda \in [-1,1]$ et comme $\lambda \neq 1$, on déduit que la suite v converge vers ℓ plus rapidement que u si, et seulement si, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell} = \lambda \in [-1,1[$.
Pour $\lambda = -1$, on a $v_n = \frac{u_n + u_{n+1}}{2}$ et cette suite accélère u si, et seulement si, u converge lentement avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell} = -1$.
Pour $0 < |\lambda| < 1$, la suite v accélère u si, et seulement si, la convergence de u est géométrique de rapport $|\lambda|$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell} = \lambda$.
2. *On a vu que la convergence de la suite u vers $e \approx 2.718281828$ est géométrique de rapport $\lambda = \frac{1}{2}$ (exercice 5.3), ce qui donne la suite v définie par :*
$$v_n = 2u_{n+1} - u_n.$$
Le développement limité à l'ordre 2 de $\exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)$ au voisinage de 0 nous donne le développement asymptotique :
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{11}{24}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$
et :
$$u_n = e\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{11}{24}\frac{1}{2^{2n}} + o\left(\frac{1}{2^{2n}}\right)\right)$$
puis :
$$v_n = e\left(1 - \frac{11}{48}\frac{1}{2^{2n}} + o\left(\frac{1}{2^{2n}}\right)\right).$$
On a donc $e - v_n \underset{+\infty}{\backsim} \frac{11}{48}\frac{1}{2^{2n}}$ et la convergence est géométrique de rapport $\frac{1}{4}$.
Pour $n = 1$, on a $u_1 = 2.25$, $v_1 \approx 2.63281250$ et pour $n = 6$, $u_6 \approx 2.697344953$, $v_6 \approx 2.718133087$.

Exercice 5.12 *Considérons l'approximation du nombre π par la méthode d'Archimède des polygones réguliers. Cette méthode consiste à introduire la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :*

$$\forall n \geq 1,\ u_n = 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right).$$

1. *Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est aussi définie par :*

$$\begin{cases} u_1 = 2, \\ \forall n \geq 1,\ u_{n+1} = \sqrt{2}2^n \sqrt{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{u_n}{2^n}\right)^2}}. \end{cases}$$

   Cette relation de récurrence permet un calcul itératif des u_n sans utiliser le nombre π que l'on veut approcher.

2. *Montrer que la convergence de cette suite vers π est géométrique de raison $\frac{1}{4}$.*
3. *Utiliser le procédé décrit à l'exercice précédent pour accélérer la convergence de cette suite en précisant la vitesse de convergence de la suite accélératrice v obtenue.*

Solution 5.12

1. *Avec :*

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{2} = \frac{1 - \sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}}{2},$$

   on déduit que :

$$\forall n \geq 1,\ u_{n+1} = \sqrt{2}2^n \sqrt{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{u_n}{2^n}\right)^2}}.$$

2. *En utilisant le développement limité :*

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right),$$

   on obtient le développement asymptotique :

$$u_n = \pi - \frac{\pi^3}{3!}\frac{1}{2^{2n}} + o\left(\frac{1}{2^{2n}}\right)$$

   et $\pi - u_n \underset{+\infty}{\backsim} \frac{\pi^3}{3!}\frac{1}{2^{2n}}$. *Cette suite converge donc vers π et la convergence est géométrique de raison* $\frac{1}{4}$.

3. *En utilisant le procédé décrit à l'exercice précédent, on accélère la convergence de cette suite en posant :*

$$\forall n \geq 1,\ v_n = \frac{4u_{n+1} - u_n}{3}.$$

   En poussant le développement limité précédent un peu plus loin, on a :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o\left(x^5\right)$$

et le développement asymptotique :

$$u_n = \pi - \frac{\pi^3}{3!}\frac{1}{2^{2n}} + \frac{\pi^5}{5!}\frac{1}{2^{4n}} + o\left(\frac{1}{2^{4n}}\right)$$

qui donne :

$$v_n = \pi - \frac{\pi^5}{5!}\frac{3}{4}\frac{1}{2^{4n}} + o\left(\frac{1}{2^{4n}}\right),$$

soit $\pi - v_n \underset{+\infty}{\backsim} \frac{\pi^5}{5!}\frac{3}{4}\frac{1}{2^{4n}}$. *Cette suite converge donc vers* π *et la convergence est géométrique de raison* $\frac{1}{16}$.

Dans le cas où on dispose d'un encadrement de la forme :

$$\varepsilon'_n \leq u_n - \ell \leq \varepsilon_n$$

où $(\varepsilon'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites convergentes vers 0, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n - \varepsilon'_n$ converge aussi vers ℓ avec $0 \leq v_n - \ell \leq \delta_n = \varepsilon_n - \varepsilon'_n$, ce qui fournit parfois une suite accélératrice.

Les exercices qui suivent nous fournissent des exemples de telle situation.

Exercice 5.13 *En utilisant l'encadrement obtenu avec l'exercice 5.4, montrer que la suite* $(v_n)_{n\geq 1}$ *définie par :*

$$\forall n \geq 1,\ v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n \cdot n!},$$

accélère la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ *définie par :*

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Solution 5.13 *On a obtenu (exercice 5.4) l'encadrement :*

$$\frac{1}{(n+1)!} < e - u_n < \frac{1}{n \cdot n!},$$

qui donne :

$$0 < v_n - e < \frac{1}{n \cdot n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n \cdot (n+1)!}$$

et :

$$0 < \frac{v_n - e}{e - u_n} \leq \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

On a par exemple :

$$u_5 = \sum_{k=0}^{5} \frac{1}{k!} \approx 2.7167,\ v_5 = u_5 + \frac{1}{5 * 5!} \approx 2.7183.$$

Exercice 5.14 *En utilisant l'encadrement obtenu avec l'exercice 5.5, montrer que la suite* $(v_n)_{n\geq 1}$ *définie par :*

$$\forall n \geq 1,\ v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} + \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}},$$

accélère la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ *définie par :*

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

Solution 5.14 *On a obtenu (exercice 5.5) l'encadrement :*

$$\forall n \geq 1,\ \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq (\alpha-1)(\ell-u_n) \leq \frac{1}{n^{\alpha-1}},$$

qui donne :

$$\forall n \geq 1,\ 0 \leq \ell - v_n \leq \frac{1}{\alpha-1}\frac{(n+1)^{\alpha-1}-n^{\alpha-1}}{n^{\alpha-1}(n+1)^{\alpha-1}},$$

et :

$$0 \leq \frac{\ell-v_n}{\ell-u_n} \leq \frac{(n+1)^{\alpha-1}-n^{\alpha-1}}{n^{\alpha-1}} \underset{+\infty}{\backsim} \frac{\alpha-1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Exercice 5.15 *En utilisant l'encadrement obtenu avec l'exercice 5.6, montrer que la suite* $(v_n)_{n\geq 1}$ *définie par :*

$$\forall n \geq 1,\ v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) + \frac{1}{2(n+1)}$$

accélère la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ *définie par :*

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$$

Solution 5.15 *On a obtenu (exercice 5.6) l'encadrement :*

$$\frac{1}{2(n+1)} < \gamma - u_n < \frac{1}{2n}$$

qui donne :

$$0 < \gamma - v_n < \frac{1}{2n(n+1)}$$

et :

$$0 \leq \frac{\gamma-v_n}{\gamma-u_n} \leq \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

5.3 Méthode d'accélération d'Aitken

Pour ce paragraphe, on suppose que suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ (toujours avec $u_n \neq \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) avec :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell} = \lambda \in \left]-1,1\right[\setminus \{0\}$$

c'est-à-dire que la convergence est géométrique de rapport $|\lambda|$. On suppose de plus que $u_{n+1} \neq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a vu avec l'exercice 5.11 que la suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des moyennes pondérées définie par :

$$v_n = \frac{u_{n+1}-\lambda u_n}{1-\lambda}$$

est une suite accélératrice de u.

Mais dans la pratique le coefficient λ peut être prévu sans connaître explicitement sa valeur, de sorte que ce procédé d'accélération n'est pas utilisable directement.

Un exemple typique d'une telle situation est fourni par une suite d'approximations successives d'un point fixe attractif ℓ d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$, le coefficient $\lambda = f'(\ell)$ qui fait intervenir le réel ℓ qu'on cherche à approximer, étant inconnu dans $\left]-1,1\right[\setminus \{0\}$ (voir l'exercice 5.7).

La méthode d'Aitken nous permet de construire une suite de réels $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui va converger vers λ et on définira une suite accélératrice par les moyennes pondérées :

$$v_n = \frac{u_{n+1}-\lambda_n u_n}{1-\lambda_n}.$$

On rappelle que la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \lambda_n = \frac{u_{n+1}-u_n}{u_n-u_{n-1}}$$

converge vers λ (lemme 5.1).

Comme $\lambda < 1$, il existe un entier n_0 tel que l'on ait $\lambda_n < 1$ pour tout $n \geq n_0$. On peut donc définir la suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ par :

$$\forall n \geq n_0,\ v_n = \frac{u_{n+1}-\lambda_n u_n}{1-\lambda_n}.$$

Théorème 5.1 *La suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ converge vers ℓ plus rapidement que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Démonstration. Pour tout $n \geq n_0$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{v_n-\ell}{u_n-\ell} &= \frac{\frac{u_{n+1}-\lambda_n u_n}{1-\lambda_n}-\ell}{u_n-\ell} = \frac{1}{1-\lambda_n}\frac{u_{n+1}-\lambda_n u_n-\ell(1-\lambda_n)}{u_n-\ell} \\ &= \frac{1}{1-\lambda_n}\left(\frac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell}-\lambda_n\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 0.\end{aligned}$$

■

En utilisant la définition des λ_n, on peut écrire chaque terme de la suite accélératrice de Aitken $(v_n)_{n\geq n_0}$ sous la forme :

$$v_n = \frac{u_{n+1}u_{n-1}-u_n^2}{u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}} = u_{n-1} - \frac{(u_n-u_{n-1})^2}{u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}}$$

(comme $\lambda_n = \dfrac{u_{n+1} - u_n}{u_n - u_{n-1}} < 1$, on a $(u_{n+1} - u_n) - (u_n - u_{n-1}) \neq 0$ et le dénominateur de v_n est bien non nul).

En introduisant les opérateurs de Aitken Δ et Δ^2 définis par :

$$\begin{cases} \Delta u_n = u_{n+1} - u_n \\ \Delta^2 u_n = \Delta(\Delta u_n) = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

on a :

$$v_{n+1} = u_n - \frac{(\Delta u_n)^2}{\Delta^2 u_n}.$$

Exercice 5.16 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = au_n + b$ où a, b sont des réels donnés avec $0 < |a| < 1$.*

1. *Montrer que u converge ver $\ell = \dfrac{b}{1-a}$ et préciser sa vitesse de convergence dans le cas où $u_0 \neq \ell$.*
2. *Décrire la suite accélératrice de Aitken correspondante.*

Solution 5.16

1. *Si cette suite converge, alors sa limite est solution de l'équation $x = ax + b$ qui a pour unique solution $\ell = \dfrac{b}{1-a}$. De $u_{n+1} = au_n + b$ et $\ell = a\ell + b$, on déduit que $u_{n+1} - \ell = a(u_n - \ell)$ et par récurrence $u_n - \ell = a^n(u_0 - \ell)$, soit $u_n = \ell + a^n(u_0 - \ell)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ avec $u_n \neq \ell$ pour tout $n \geq 0$ et $\dfrac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell} = a$, c'est-à-dire que la convergence est géométrique de rapport $|a|$ (ce qui n'est pas étonnant).*
2. *On a $u_{n+1} - u_n = a^n(u_0 - \ell)(a-1)$ et $u_{n+1} - au_n = b = \ell(1-a)$, de sorte que :*

$$\lambda_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n - u_{n-1}} = a \text{ et } v_n = \frac{u_{n+1} - \lambda_n u_n}{1 - \lambda_n} = \ell.$$

La suite v est donc stationnaire sur ℓ.

Exercice 5.17 *On reprend la situation de l'exercice 5.7 avec $I = [a, b]$ et $f : I \to I$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $0 < |f'(x)| < 1$ pour tout $x \in I$.*
On a vu que cette fonction admet un unique point fixe (attractif) $\ell \in I$ et que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in I \setminus \{\ell\}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \geq 0$ converge vers ℓ avec $u_n \neq \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la convergence étant géométrique de rapport $|f'(\ell)|$.
Montrer que, si $f''(\ell) \neq 0$, alors la convergence de la suite accélératrice v de Aitken correspondante est géométrique de rapport $(f'(\ell))^2$.

Solution 5.17 *Un développement limité à l'ordre 2 en ℓ nous donne, en tenant compte de $f(\ell) = \ell$:*

$$u_n - \ell = f'(\ell)(u_{n-1} - \ell) + \frac{f''(\ell)}{2}(u_{n-1} - \ell)^2 + o\left((u_{n-1} - \ell)^2\right).$$

En notant $e_n = u_n - \ell$, $\lambda = f'(\ell)$ et $\mu = \dfrac{f''(\ell)}{2}$, cela s'écrit :

$$e_n = \lambda e_{n-1} + \mu e_{n-1}^2 + o\left(e_{n-1}^2\right)$$

et, en désignant par $(v_n)_{n\geq n_0}$ *la suite accélératrice de Aitken, on a :*

$$v_n - \ell = u_{n-1} - \ell - \frac{(\Delta u_{n-1})^2}{\Delta^2 u_{n-1}}$$

avec :

$$\begin{cases} \Delta u_{n-1} = u_n - u_{n-1} = e_n - e_{n-1} \\ \Delta^2 u_{n-1} = u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = e_{n+1} - 2e_n + e_{n-1} \end{cases}$$

ce qui donne :

$$v_n - \ell = e_{n-1} - \frac{(e_n - e_{n-1})^2}{e_{n+1} - 2e_n + e_{n-1}}$$

avec :

$$\begin{cases} e_n - e_{n-1} = (\lambda - 1)\, e_{n-1} + \mu e_{n-1}^2 + o\left(e_{n-1}^2\right), \\ (e_n - e_{n-1})^2 = (\lambda - 1)^2\, e_{n-1}^2 + 2\mu\,(\lambda - 1)\, e_{n-1}^3 + o\left(e_{n-1}^3\right), \\ e_{n+1} - e_n = \lambda\,(\lambda - 1)\, e_{n-1} + ((\lambda - 1)\,\mu + \lambda^2\mu)\, e_{n-1}^2 + o\left(e_{n-1}^2\right), \\ e_{n+1} - 2e_n + e_{n-1} \;=\; (e_{n+1} - e_n) - (e_n - e_{n-1}) \\ \qquad = (\lambda - 1)^2\, e_{n-1} + (\lambda - 1)\,(\lambda + 2)\,\mu e_{n-1}^2 + o\left(e_{n-1}^2\right) \end{cases}$$

et donc :

$$\begin{aligned} v_n - \ell &= e_{n-1} - \frac{(\lambda - 1)\, e_{n-1} + 2\mu e_{n-1}^2 + o\left(e_{n-1}^2\right)}{(\lambda - 1) + \mu\,(\lambda + 2)\, e_{n-1} + o\,(e_{n-1})} \\ &= \frac{\lambda\mu + o\,(1)}{(\lambda - 1) + o\,(1)} e_{n-1}^2. \end{aligned}$$

ou encore :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n - \ell}{e_{n-1}^2} = \frac{\lambda\mu}{\lambda - 1}.$$

Comme $f''(\ell) \neq 0$, *on a* $\mu \neq 0$ *et :*

$$v_n - \ell \underset{+\infty}{\backsim} \frac{\lambda\mu}{1 - \lambda} e_{n-1}^2 = \frac{f'(\ell)\, f''(\ell)}{2\,(1 - f'(\ell))} e_{n-1}^2.$$

On a donc :

$$\frac{v_{n+1} - \ell}{v_n - \ell} \underset{+\infty}{\backsim} \left(\frac{e_n}{e_{n-1}}\right)^2 \underset{+\infty}{\backsim} \lambda^2 = (f'(\ell))^2.$$

En définitive, on est passé d'une convergence géométrique de rapport $|f'(\ell)|$ *à une convergence géométrique de rapport* $(f'(\ell))^2$, *ce qui confirme l'accélération de la convergence puisque* $|f'(\ell)| < 1$.

Remarque 5.5 *Si, avec les notations de l'exercice précédent, on désigne pour tout entier naturel* n, *par* M_n *le point de* $\mathbb{R}^2$ *de coordonnées* $(u_n, f(u_n)) = (u_n, u_{n+1})$ *dans la base canonique, la pente de la droite* $(M_n M_{n+1})$ *est :*

$$\delta_n = \frac{u_{n+2} - u_{n+1}}{u_{n+1} - u_n} = \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}$$

et l'équation de cette droite est :

$$y = u_{n+1} + \frac{\Delta u_{n+1}}{\Delta u_n}(x - u_n).$$

Le point d'intersection de cette droite avec la première bissectrice est le point M_n' de coordonnées (x_n, x_n) où x_n est solution de :

$$x = u_{n+1} + \frac{\Delta u_{n+1}}{\Delta u_n} (x - u_n) = \Delta u_n + u_n + \frac{\Delta u_{n+1}}{\Delta u_n} (x - u_n)$$

soit de :

$$(x - u_n) \left(1 - \frac{\Delta u_{n+1}}{\Delta u_n}\right) = \Delta u_n$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} x_n &= u_n + \frac{\Delta u_n}{1 - \frac{\Delta u_{n+1}}{\Delta u_n}} = u_n - \frac{(\Delta u_n)^2}{\Delta u_{n+1} - \Delta u_n} \\ &= u_n - \frac{(\Delta u_n)^2}{\Delta^2 u_n} = v_{n+1} \end{aligned}$$

Remarque 5.6 *Pour la programmation de la méthode de Aitken on peut remarquer que les v_n s'écrivent aussi :*

$$v_n = u_n + \left(\frac{1}{u_{n+1} - u_n} - \frac{1}{u_n - u_{n-1}}\right)^{-1}.$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{u_{n+1} u_{n-1} - u_n^2}{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}} \\ &= u_n - \frac{(u_{n+1} - u_n)(u_n - u_{n-1})}{(u_{n+1} - u_n) - (u_n - u_{n-1})} \\ &= u_n + \frac{1}{\frac{1}{u_{n+1} - u_n} - \frac{1}{u_n - u_{n-1}}}. \end{aligned}$$

Dans le cas où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'approximations successives définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ (avec les notations et hypothèses de l'exercice précédent), en définissant la fonction g par $g(x) = \dfrac{1}{f(x) - x}$ pour $x \in I \setminus \{\ell\}$, les v_n peuvent se calculer comme suit :

$$\begin{cases} u_n = f(u_{n-1}), \\ v_n = u_n + \dfrac{1}{g(u_n) - g(u_{n-1})}. \end{cases}$$

Exemple 5.1 *On s'intéresse aux points fixes de la fonction $f : x \mapsto e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$. Cette fonction est indéfiniment dérivable, strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ avec $f'(x) = -e^{-x}$ et $f([0, +\infty[) =]0, 1]$. En posant $I = [e^{-1}, 1] = [0.367\,88, 1]$, on a $f(I) = \left[e^{-1}, e^{-e^{-1}}\right] \subset I$ et $0 < |f'(x)| \leq \lambda = e^{-1} < 1$ pour tout $x \in I$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0.5$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \geq 0$ converge donc vers l'unique point fixe $\ell \in I$, la convergence étant géométrique.*
Le programme Maple qui suit nous donne les valeurs des u_n et v_n pour n compris entre 1 et 15 :

```
restart; f :=x->exp(-x); g :=x->1/(f(x)-x); i :=0; x :=0.5;
for n from 1 to 15 do
i :=i+1; z :=f(x); y :=z+1/(g(z)-g(x)); x :=z;
```

od ;
Ce qui donne les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} u_1 = 0.6065306597 \\ v_1 = 0.5676238764 \end{cases} \begin{cases} u_{14} = 0.5671188642 \\ v_{14} = 0.5671432906 \end{cases} \begin{cases} u_{15} = 0.5671571437 \\ v_{15} = 0.5671432905 \end{cases}$$

On constate que la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vers le point fixe de* f, $\ell = 0.567143290409$, *est plus rapide que celle de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
En utilisant $f' = -f$, $f'' = f$ *et* $f(\ell) = \ell$, *on a ici :*

$$\begin{cases} v_n - \ell \underset{+\infty}{\backsim} \dfrac{f'(\ell) f''(\ell)}{2(1-f'(\ell))} (u_{n-1}-\ell)^2 = \dfrac{\ell^2}{2(1+\ell)} (u_{n-1}-\ell)^2 \\ \dfrac{v_{n+1}-\ell}{v_n-\ell} \underset{+\infty}{\backsim} (f'(\ell))^2 = \ell^2 \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} \ell^2 \approx 0.321651511855947 \\ \dfrac{\ell^2}{2(1+\ell)} \approx 0.102623516887215 \end{cases}$$

Dans le cas d'un point fixe super-attractif (c'est-à-dire que $f'(\ell) = 0$), en supposant de plus que $f''(\ell) \neq 0$, on a, pour f de classe $\mathcal{C}^4$, le développement asymptotique suivant de l'erreur d'approximation :

$$e_n = \lambda_2 e_{n-1}^2 + \lambda_3 e_{n-1}^3 + \lambda_4 e_{n-1}^4 + o\left(e_{n-1}^4\right),$$

où on a noté :

$$\lambda_2 = \frac{f''(\ell)}{2},\ \lambda_3 = \frac{f^{(3)}(\ell)}{3!},\ \lambda_4 = \frac{f^{(4)}(\ell)}{3!},$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} (e_n - e_{n-1})^2 = e_{n-1}^2 - 2\lambda_2 e_{n-1}^3 + (\lambda_2^2 - 2\lambda_3) e_{n-1}^4 + o\left(e_{n-1}^4\right) \\ e_{n+1} - e_n \;=\; \lambda_2 e_n^2 + o(e_n^2) - e_n \\ \qquad = -\lambda_2 e_{n-1}^2 - \lambda_3 e_{n-1}^3 + (\lambda_2^3 - \lambda_4) e_{n-1}^4 + o\left(e_{n-1}^4\right) \\ e_{n+1} - 2e_n + e_{n-1} = e_{n-1} - 2\lambda_2 e_{n-1}^2 - 2\lambda_3 e_{n-1}^3 + (\lambda_2^3 - 2\lambda_4) e_{n-1}^4 + o\left(e_{n-1}^4\right) \end{cases}$$

et :

$$v_n - \ell = \frac{-\lambda_2^2 + o(1)}{1 - 2\lambda_2 e_{n-1} + o(e_{n-1})} e_{n-1}^3 = \left(-\lambda_2^2 + o(1)\right) e_{n-1}^3,$$

soit :

$$v_n - \ell \underset{+\infty}{\backsim} \frac{(f''(\ell))^2}{4} (u_n - \ell)^3.$$

Avec

$$\begin{cases} v_n - \ell = (-\lambda_2^2 + o(1)) e_{n-1}^3, \\ v_{n+1} - \ell = (-\lambda_2^2 + o(1)) e_n^3 = (-\lambda_2^5 + o(1)) e_{n-1}^6, \end{cases}$$

on déduit que :

$$\frac{v_{n+1} - \ell}{(v_n - \ell)^2} \backsim \frac{f''(\ell)}{2}.$$

La convergence vers ℓ de $(v_n)_{n\geq n_0}$ est donc, comme celle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d'ordre 2, mais cette convergence est quand même plus rapide.

Exercice 5.18 *Donner une expression de la suite accélératrice de Aitken pour la suite* $(u_n)_{n\geq 1}$ *définie par :*

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

où $\alpha > 1$. *Préciser la vitesse de convergence de cette suite accélératrice.*

Solution 5.18 *On a :*

$$\begin{cases} \Delta u_n = u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^\alpha} \\ \Delta^2 u_n = \Delta(\Delta u_n) = \dfrac{1}{(n+2)^\alpha} - \dfrac{1}{(n+1)^\alpha} \end{cases}$$

et :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_n - \frac{(\Delta u_n)^2}{\Delta^2 u_n} = u_n - \frac{(n+2)^\alpha}{(n+1)^{2\alpha} - (n+2)^\alpha (n+1)^\alpha} \\ &= u_n + \frac{(n+2)^\alpha}{(n+1)^\alpha \left((n+2)^\alpha - (n+1)^\alpha\right)}. \end{aligned}$$

Par exemple, pour $n = 2$, *on a :*

$$v_{n+1} = u_n + \frac{(n+2)^2}{(n+1)^2 (2n+3)}$$

En reprenant les calculs de l'exercice 5.5, on a pour tout $n \geq 1$ *:*

$$\frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq \ell - u_n \leq \frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \left(1 - \tfrac{(\alpha-1)(n+2)^\alpha}{(n+1)((n+2)^\alpha - (n+1)^\alpha)}\right) &\leq \ell - v_{n+1} \\ &\leq \tfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \left(1 - \tfrac{n^{\alpha-1}(\alpha-1)(n+2)^\alpha}{(n+1)^\alpha((n+2)^\alpha - (n+1)^\alpha)}\right) \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \left(1 - \tfrac{(\alpha-1)}{(n+1)\ \ 1 - \ \frac{n+1}{n+2}\ \ ^{\alpha}}\right) &\leq \ell - v_{n+1} \\ &\leq \tfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \left(1 - \tfrac{n^{\alpha-1}(\alpha-1)}{(n+1)^\alpha\left(1 - \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^\alpha\right)}\right) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^\alpha &= 1 - \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^\alpha = 1 - \left(1 - \alpha\frac{1}{n+2} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \alpha\frac{1}{n+2} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{n} \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\frac{n^{\alpha-1}(\alpha-1)}{(n+1)^\alpha\left(1 - \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^\alpha\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha-1}(\alpha-1)}{n^\alpha \dfrac{\alpha}{n}} = \frac{\alpha - 1}{\alpha}$$

et :

$$\frac{(\alpha-1)}{(n+1)\left(1-\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{\alpha}\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha-1}{n\dfrac{\alpha}{n}} = \frac{\alpha-1}{\alpha}$$

Il en résulte que :

$$\ell - v_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}\left(1-\frac{\alpha-1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha(\alpha-1)\,n^{\alpha-1}}$$

et la convergence de la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ *est lente.*

5.4 Méthode d'accélération de Richardson

On se place dans un premier temps dans le cas où on dispose d'un développement asymptotique de la forme :

$$u_n = \ell + \beta\lambda^n + \gamma\mu^n + o(\mu^n)$$

avec β, γ non nuls et $0 < |\mu| < |\lambda| < 1$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers ℓ et la convergence est géométrique de rapport $|\lambda|$.

Si on connaît explicitement les coefficients β et λ, on peut accélérer la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en la remplaçant par la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$v_n = u_n - \beta\lambda^n.$$

Cette suite converge bien vers ℓ et avec $v_n - \ell \underset{+\infty}{\backsim} \gamma\mu^n$, la convergence est donc géométrique de rapport $|\mu|$ et :

$$\frac{v_n-\ell}{u_n-\ell} \underset{+\infty}{\backsim} \frac{\gamma}{\beta}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$

ce qui confirme bien que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ plus vite que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Si on connaît explicitement le coefficient λ, mais pas le coefficient β, on peut définir un barycentre de u_{n+1} et u_n où le terme $\beta\lambda^n$ a été éliminé. Pour ce faire, on écrit que :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \ell + \beta\lambda^{n+1} + \mu^{n+1}(\gamma + o(1)) \\ u_n = \ell + \beta\lambda^n + \mu^n(\gamma + o(1)) \end{cases}$$

et :

$$u_{n+1} - \lambda u_n = (1-\lambda)\,\ell + \mu^n\left((\mu-\lambda)\,\gamma + o(1)\right),$$

ce qui nous conduit à introduire la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$v_n = \frac{u_{n+1}-\lambda u_n}{1-\lambda}.$$

C'est la situation décrite à l'exercice 5.11.

On a alors :

$$v_n - \ell = \mu^n\left(\frac{\mu-\lambda}{1-\lambda}\gamma + o(1)\right) \underset{+\infty}{\backsim} \frac{\mu-\lambda}{1-\lambda}\gamma\mu^n$$

c'est-à-dire que la convergence est géométrique de rapport $|\mu|$ et :

$$\frac{v_n-\ell}{u_n-\ell} \underset{+\infty}{\backsim} \frac{\mu-\lambda}{1-\lambda}\frac{\gamma}{\beta}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

On est donc ainsi passé de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers ℓ avec une vitesse de convergence géométrique de raison $|\lambda|$ à la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge aussi vers ℓ avec une vitesse de convergence géométrique de raison $|\mu| < |\lambda|$.

Les exercices 5.11 et 5.12 nous donnent des exemples de cette situation où on approxime respectivement les nombres e et π.

De manière plus générale, si on dispose d'un développement asymptotique de la forme :

$$u_n = \ell + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

avec β et γ non nuls, on utilise la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle on a le développement asymptotique :

$$v_n = \ell + \frac{\beta}{2^n} + \frac{\gamma}{4^n} + o\left(\frac{1}{4^n}\right)$$

et une suite accélératrice est définie par :

$$w_n = 2v_{n+1} - v_n.$$

On a alors :

$$\begin{cases} v_n - \ell \underset{+\infty}{\backsim} \dfrac{\beta}{2^n} \\ w_n - \ell \underset{+\infty}{\backsim} -\dfrac{1}{2}\dfrac{\gamma}{4^n} \end{cases}$$

c'est-à-dire qu'on passe d'une convergence géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ à une convergence géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$ (voir l'exercice 5.11).

La méthode de Richardson consiste à itérer le procédé précédent dès que l'on dispose d'un développement asymptotique de la forme :

$$u_n = \ell + \sum_{j=1}^{p+1} \beta_j \lambda_j^n + o\left(\lambda_{p+1}^n\right)$$

où p est un entier naturel non nul, les coefficients β_j sont tous non nuls et les coefficients λ_j tels que :

$$0 < |\lambda_{p+1}| < |\lambda_p| < \cdots < |\lambda_1| < 1.$$

Si tous les coefficients β_j et λ_j sont connus, on peut accélérer la convergence de cette suite en introduisant la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$v_n = u_n - \sum_{j=1}^{p+1} \beta_j \lambda_j^n.$$

Ce cas se présente pour les sommes de séries numériques de la forme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f(n)$, où la fonction f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^{+,*}$. Le développement asymptotique est obtenu en utilisant la formule d'Euler et Mac-Laurin en supposant le calcul explicite des dérivées de la fonction f facilement réalisable. C'est le cas par exemple pour les séries de Riemann convergentes.

Si les coefficients λ_j sont tous connus, mais pas les coefficients β_j, on va les éliminer progressivement en itérant le procédé barycentrique décrit précédemment, ce qui nous amène à introduire, pour tout entier k compris entre 0 et p, les suites $(u_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les formules de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} u_{n,0} = u_n, \\ u_{n,k} = \dfrac{u_{n+1,k-1} - \lambda_k u_{n,k-1}}{1-\lambda_k}. \end{cases}$$

Lemme 5.2 *Avec les notations et hypothèses qui précèdent, on a pour tout entier k compris entre 0 et p, le développement asymptotique :*

$$u_{n,k} = \ell + \sum_{j=k+1}^{p+1} \beta_{k,j}\lambda_j^n + o\left(\lambda_{p+1}^n\right),$$

les coefficients $\beta_{k,j}$ étant tous non nuls.

Démonstration. On procède par récurrence finie sur k.
Pour $k = 0$ c'est l'hypothèse.
En supposant le résultat acquis au rang $k-1 < p$, on a :

$$\begin{cases} u_{n+1,k-1} = \ell + \sum\limits_{j=k}^{p+1} \beta_{k-1,j}\lambda_j^{n+1} + o\left(\lambda_{p+1}^{n+1}\right) \\ u_{n,k-1} = \ell + \sum\limits_{j=k}^{p+1} \beta_{k-1,j}\lambda_j^{n} + o\left(\lambda_{p+1}^{n}\right) \end{cases}$$

l'élimination du coefficient $\beta_{k-1,k}$ entre ces deux équations se faisant avec :

$$\frac{u_{n+1,k-1} - \lambda_k u_{n,k-1}}{1-\lambda_k} = \ell + \sum_{j=k+1}^{p+1} \beta_{k,j}\lambda_j^n + o\left(\lambda_{p+1}^n\right)$$

où $\beta_{k,j} = \dfrac{\lambda_j - \lambda_k}{1-\lambda_k}\beta_{k-1,j} \neq 0$ pour tout j compris entre $k+1$ et $p+1$. ■

Théorème 5.2 (Richardson) *Avec les notations et hypothèses qui précèdent, pour tout entier k compris entre 1 et p, la suite $(u_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ plus rapidement que la suite $(u_{n,k-1})_{n\in\mathbb{N}}$, la convergence de la suite $(u_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ étant géométrique de raison $|\lambda_{k+1}|$. Plus précisément, pour tout k compris entre 0 et p, on a :*

$$u_{n,k} - \ell \underset{+\infty}{\backsim} \beta_{k,k+1}\lambda_{k+1}^n$$

avec :

$$\beta_{k,k+1} = \beta_{k+1} \prod_{j=1}^{k} \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_j}{1-\lambda_j}.$$

Démonstration. Avec l'hypothèse $0 < |\lambda_{p+1}| < \cdots < |\lambda_{k+1}| < |\lambda_k|$ et lemme précédent, on déduit que, pour k compris entre 1 et p, on a :

$$\begin{cases} u_{n,k} - \ell \underset{+\infty}{\backsim} \beta_{k,k+1}\lambda_{k+1}^n \\ \dfrac{u_{n,k} - \ell}{u_{n,k-1} - \ell} \underset{+\infty}{\backsim} \dfrac{\beta_{k,k+1}}{\beta_{k-1,k}} \left(\dfrac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \end{cases}$$

avec :

$$\beta_{k,k+1} = \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{1-\lambda_k} \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_{k-1}}{1-\lambda_{k-1}} \cdots \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_1}{1-\lambda_1}\beta_{k+1}$$

ce qui est le résultat annoncé. ■

Exercice 5.19 *On reprend l'exemple de la suite d'Archimède* $u = (u_n)_{n\geq 1}$ *permettant d'approcher le nombre* π. *On rappelle qu'elle est définie par :*

$$\forall n \geq 1,\ u_n = 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$$

(exercice 5.12).

1. *En utilisant, pour* $p \geq 1$, *le développement limité à l'ordre* $2p$ *de la fonction* sin, *donner un développement asymptotique de la suite* u.
2. *En déduire les suites accélératrices correspondantes à la méthode de Richardson.*

Solution 5.19

1. *Avec le développement limité :*

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j \frac{\pi^{2j}}{(2j+1)!} x^{2j} + o\left(x^{2p+2}\right),$$

on obtient le développement asymptotique :

$$u_n = \pi + \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^j \frac{\pi^{4j+1}}{(2j+1)!} \left(\frac{1}{4^j}\right)^n + o\left(\left(\frac{1}{4^{p+1}}\right)^n\right)$$

2. *Les suites accélératrices correspondantes à la méthode de Richardson sont donc données par :*

$$\left\{\begin{array}{l} u_{n,0} = u_n = 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right),\ (n \geq 1) \\ u_{n,k} = \dfrac{u_{n+1,k-1} - \frac{1}{4^k} u_{n,k-1}}{1 - \frac{1}{4^k}} = \dfrac{4^k u_{n+1,k-1} - u_{n,k-1}}{4^k - 1}\ \ (1 \leq k \leq p,\ n \geq 1). \end{array}\right.$$

L'exercice précédent peut se ramener à la situation suivante. On dispose d'une fonction f définie sur $I =]-1, 1[$ et admettant un développement limité d'ordre $p+1$ en 0 :

$$f(x) = \ell + \sum_{j=1}^{p+1} \beta_j x^j + o\left(x^{p+1}\right)$$

où p est un entier naturel non nul et les coefficients β_j sont tous non nuls. On associe à cette fonction la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\forall n \geq 1,\ u_n = f(r^n)$$

où r est un réel non nul dans $]-1, 1[$. On a alors le développement asymptotique :

$$u_n = \ell + \sum_{j=1}^{p+1} \beta_j \lambda_j^n + o\left(\lambda_{p+1}^n\right)$$

où les coefficients $\lambda_j = r^j$ vérifient bien l'hypothèse :

$$0 < |\lambda_{p+1}| < |\lambda_p| < \cdots < |\lambda_1| < 1.$$

On peut donc définir les suites accélératrices $(u_{n,k})_{n\geq 1}$ par :

$$\begin{cases} u_{n,0} = u_n = f\left(r^n\right) \\ u_{n,k} = \dfrac{u_{n+1,k-1} - r^k u_{n,k-1}}{1-r^k} \ \ (1 \leq k \leq p). \end{cases}$$

Les coefficients $\beta_{k,k+1}$ sont alors donnés par :

$$\begin{aligned} \beta_{k,k+1} &= \beta_{k+1} \prod_{j=1}^{k} \frac{r^{k+1} - r^j}{1-r^j} = \beta_{k+1} \prod_{j=1}^{k} r^j \frac{r^{k+1-j} - 1}{1-r^j} \\ &= \frac{\left(r^k - 1\right)\left(r^{k-1} - 1\right) \cdots (r-1)}{(1-r) \cdots \left(1-r^{k-1}\right)\left(1-r^k\right)} \beta_{k+1} \prod_{j=1}^{k} r^j \\ &= (-1)^k r^{(1+2+\cdots+k)} \beta_{k+1} = (-1)^k r^{\frac{k(k+1)}{2}} \beta_{k+1} \end{aligned}$$

On a donc, pour tout k compris entre 0 et p :

$$u_{n,k} - \ell \underset{+\infty}{\backsim} (-1)^k \beta_{k+1} r^{\frac{(k+1)(2n+k)}{2}}$$

Pour la suite d'Archimède, on a :

$$\forall n \geq 1,\ u_n = 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = f\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

où $f(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{x}$ et en écrivant $f(x) = g\left(x^2\right)$, où :

$$g(t) = \pi + \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^j \frac{\pi^{2j+1}}{(2j+1)!} t^j + o\left(x^{p+1}\right)$$

on se ramène à la situation précédente avec $r = \dfrac{1}{4}$. On a alors, pour tout k compris entre 0 et p :

$$\pi - u_{n,k} \underset{+\infty}{\backsim} \frac{\pi^{2k+3}}{(2k+3)!} \frac{1}{2^{(2n+k)(k+1)}}.$$

On a, par exemple, pour les trois premières suites :

$$\begin{cases} u_n = 2^n \sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right), \\ u_{n,1} = \dfrac{4u_{n+1} - u_n}{3}, \\ u_{n,2} = \dfrac{16u_{n+1,1} - u_{n,1}}{15}, \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} \pi - u_n \underset{+\infty}{\backsim} \dfrac{\pi^3}{6} \dfrac{1}{4^n}, \\ \pi - u_{n,1} \underset{+\infty}{\backsim} \dfrac{\pi^5}{5!} \dfrac{4}{16^{n+1}}, \\ \pi - u_{n,2} \underset{+\infty}{\backsim} \dfrac{\pi^7}{7!} \dfrac{1}{64^{n+1}}. \end{cases}$$

Exemple 5.2 *Si on reprend l'exemple du nombre e approché par la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :*

$$\forall n \geq 0,\ u_n = \left(1+\frac{1}{2^n}\right)^{2^n},$$

On a $u_n = f\left(\frac{1}{2^n}\right)$, *où f est la fonction définie sur* $]-1,1[$ *par :*

$$f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} \ si\ 0 < |x| < 1, \\ 0\ si\ x = 0. \end{cases}$$

Cette fonction est indéfiniment dérivable sur $]-1,1[$ *comme composée des fonctions :*

$$g : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n}$$

et $t \mapsto e^t$, *elle admet donc des développements limités à tous ordres en* 0. *Par exemple, à l'ordre* 3, *on a :*

$$e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 - \frac{7e}{16}x^3 + o\left(x^3\right).$$

On peut donc utiliser le procédé d'accélération de Richardson avec $r = \frac{1}{2}$, *ce qui donne les suites accélératrices définies par :*

$$\begin{cases} u_{n,0} = u_n = \left(1+\frac{1}{2^n}\right)^{2^n} \ (n \geq 0), \\ u_{n,k} = \frac{2^k x_{n+1,k-1} - x_{n,k-1}}{2^k - 1} \ (k \geq 1), \end{cases}$$

et on a :

$$u_{n,k} - e \underset{+\infty}{\backsim} (-1)^k \beta_{k+1} \frac{1}{2^{(2n+k)\frac{k+1}{2}}}.$$

Ce qui donne, par exemple, pour les trois premières suites :

$$\begin{cases} u_n = \left(1+\frac{1}{2^n}\right)^{2^n}, \\ u_{n,1} = 2u_{n+1} - u_n, \\ u_{n,2} = \frac{4u_{n+1,1} - u_{n,1}}{3}, \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} e - u_n \underset{+\infty}{\backsim} \frac{e}{2}\frac{1}{2^n}, \\ e - u_{n,1} \underset{+\infty}{\backsim} \frac{11e}{24}\frac{1}{2^{2n+1}}, \\ e - u_{n,2} \underset{+\infty}{\backsim} \frac{7e}{16}\frac{1}{2^{3[n+1]}}. \end{cases}$$